КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА N2
ПО КУРСУ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

Лектор Е.В.Чепурин

Пусть $y = (y_1, \dots y_n)^T$, $y_i \in R^1$, y_i - н.о.р. случайные величины, $i = \overline{1, n}$,

$$\mathcal{L}'(y_i) = f(u; \theta_0), \quad \theta_0 \in \Theta,$$

Θ - параметрическое пространство.

1. Нарисуйте график плотности распределения случайной величины y_1 для тех значений θ , которые представляют все возможные его формы.

2. Какова у данной статистической модели минимальная достаточная статистика?

   2.1. Полна ли она?

   2.2. Найдите ее распределение.

3. Рассматривается задача точечного оценивания значения $g(\theta_0)$ функции g в классе оценок $\mathcal{K} = \{t(y)\}$ при квадратической функции потерь $W(g, t) = (t - g)^2$.

   3.1. Найдите $\hat{t}^0$ – НОРМД и $\check{t}$ – ОМП функции g .

   3.2. Существует ли в $\mathcal{K}$ оценка, миниминизирующая среднеквадратический риск

   $$R(t, g; \theta) = \mathbf{E}\{(t(y) - g(\theta))^2; \theta\}$$

   равномерно по всем $\theta \in \Theta$, если $\mathcal{K} = \{\hat{t}^0, \quad \check{t}\}$?

4. Найдите информационную функцию Фишера для рассматриваемой модели.

5. Достигает ли риск оценки $\hat{t}^0$ нижней границы Крамера-Рао или какой-либо границы Бхаттачария?

6. Для параметров рассматриваемой модели постройте γ -доверительное множество.

   6.1. Существует ли центральная функция? Если она существует, то каков ее вид и каково ее распределение?

   6.2. Какую статистику следует взять для построения γ -доверительных множеств методом сечений, если центральной статистики не существует?

7. Постройте для $g(\theta_0)$ оценку по методу моментов 6.1. Какова асимптотическая эффективность по Леману этой оценки относительно ОМП для $g(\theta_0)$?

   7.1. Являются ли оценки максимума правдоподобия параметров и функции g состоятельными при $n \to \infty$?

   7.2. Каково асимптотическое распределение ОМП оценки $g(\theta_0)$ при $n \to \infty$?

8. Считая, что $n \to \infty$, постройте на основе одной из оценок из $\mathcal{K}$ асимптотические γ-доверительные границы для $g(\theta_0)$.

    8.1. Объясните, с чем связан Ваш выбор.

    8.2. Сравните полученные доверительные границы с консервативными доверительными границами для $g(\theta_0)$, построенными на основе ОМП для θ_0.

9. Пусть необходимо проверить гипотезу $\Gamma_1 \quad : \quad g(\theta_0) \leq a_1$ против альтернативы $\Gamma_2 \, : \, g(\theta_0) \geq a_2, a_1 < a_2$ размера α_1.

    9.1. Существует ли для сформулированной выше задачи РНМ - критерий?

    9.2. Является ли предложенный Вами критерий несмещенным?

    9.3. Считая, что $n \to \infty$, постройте для сформулированной выше задачи критерий асимптотического размера α_1 на основе ОМП для $g(\theta_0)$.

r	Код задания	$g(\theta)$	Распределение
1	i_1	$\mathbf{P}\{y_1 < u;\theta\}$	П
2	i_2	$\alpha^r,\ r=1$	А
3	i_2	$\alpha^r,\ r=2$	Р
4	i_3	$\sigma^r,\ r=1$	Е
5	i_3	$\sigma^r,\ r=2$	Т
6	i_g	$(\mathbf{P}\{y_1 > u;\theta\})$	О
7	m_2	σ	Об-
8	m_3	σ^{-1}	
9	m_4	σ^{-2}	рат-
10	m_5	$\alpha\sigma$	
11	m_6	α/σ	но
12	m_7	$(\alpha\sigma)^{-1}$	
13	m_8	$(\alpha\sigma)^2$	гаус-
14	m_9	$(\alpha\sigma)^3$	
15	m_{11}	$(\alpha\sigma)^{-2}$	совс-
16	m_{12}	α	
17	m_{13}	α^{-1}	кое
18	e_1	μ	Показа-
19	e_3	$\mathbf{E}\{y_1^m;\theta\}, m=1$	
20	e_3	$\mathbf{E}\{y_1^m;\theta\}, m=2$	тельное
21	e_4	σ	
22	e_5	μ^2	
23	e_6	σ^2	(сдвигово-
24	e_8	$\mathbf{D}\{y_1;\theta\}$	
25	e_9	$\mu^2+\sigma^2$	
26	e_{10}	$\mu+\sigma\ln\frac{1}{1-q}$	масштабное)
27	e_{13}	σ^{-1}	

r	Код задания	$g(\theta)$	Распределение
28	g_7	$\mathbf{E}\{y_1^3;\theta\}$	нормаль-
29	g_8	$\mu+a\sigma$, a известная величина	ное
30	k_3	$\mathbf{E}\{y_1^k;\theta\}, \alpha=3, k=3$	ГАМ-
31	k_4	$\mathbf{E}\{\frac{1}{y_1};\theta\}, \alpha=4$	МА
32	s_1	θ_1	Равномерное
33	s_3	θ_2	на $[\theta_1,\theta_2]$
34	p_1	$\theta^2, \alpha=3$	Вейбулла
35	c_2	$\mathbf{D}\{y_1;\theta\}$	Отрицательно-
36	c_3	$\mathbf{E}\{y_1^2;\theta\}$	биноминальное
37	n_1	$\theta^v, k=2$	Усеченное
38	n_2	$1-\exp\{-\theta\}$	пуассоновское

ИНФОРМАЦИЯ К КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЕ N 2

a. Биномиальное распределение

$$f(u;\theta) = C_r^u \theta^u (1-\theta)^{r-u},\ u = 0,1,\ldots,r;\ r > 1,$$

r – целое, $0 < \theta < 1$.

Обозначение случайной величины $BIN(r,\theta)$, т.е. $y_1 \overset{d}{=} BIN(r,\theta)$.

Производящая функция

$$(z) = \mathbf{E}(z^{y_1};\theta) = \sum_{u=0}^{r} z^u C_r^u \theta^u (1-\theta)^{r-u} = \{1+\theta(z-1)\}^r.$$

Факториальный момент порядка "k"

$$f_k = \frac{d^k}{dz^k}(z)|_{z=1} = r(r-1)\ldots,(r-k+1)\theta^k.$$

$\mathbf{E}\{y_1;\theta\} = r\theta,$
$\mathbf{E}\{y_1^2;\theta\} = r\theta(1+(r-1)\theta),$
$\mathbf{D}\{y_1;\theta\} = r\theta(1-\theta).$

a_1 $f(u;\ \theta) = C_r^u \theta^u (1-\theta)^{r-u}, u = 0,1,...,r;\ r -$ целое, $r \geq 1;$
$0 \leq \theta \leq 1;\ g(\theta) = \theta(1-\theta),$
$\mathcal{K} = \{t_1, t_2\},\ t_1 -$ ОМП, $t_2 -$ НОРМД

a_2 $f(u;\ \theta) = C_r^u \theta^u (1-\theta)^{r-u},\ u = 0,1,\ldots,r;\ 0 \leq \theta \leq 1,\ g(\theta) = \theta^2,$
$\mathcal{K} = \{t_1, t_2\},\ t_1 -$ ОМП, $t_2 -$ НОРМД

b. Распределение Пуассона.

$$f(u;\theta) = \frac{\theta^u \exp\{-\theta\}}{u!}, u = 0,1,2,\ldots, \quad \theta > 0.$$

Обозначение случайной величины $POIS(\theta)$, т.е.

$$y_1 \overset{d}{=} POIS(\theta),$$

$\mathbf{E}\{y_1;\theta\} = \theta,$
$\mathbf{E}\{y_1^2;\theta\} = \theta(1+\theta),$
$\mathbf{D}\{y_1;\theta\} = \theta.$
Производящая функция $(z) = exp\{\theta(z-1)\}$.

b_1 $f(u;\ \theta) = \frac{\theta^u e^{-\theta}}{u!};\ \theta \geq 0;\ u = 0,1,2,.......;\ g(\theta) = M\{y_1^2;\theta\},$
$\mathcal{K} = \{t_1, t_2\},\ t_1 -$ ОМП, $t_2 -$ НОРМД

b_2 $f(u;\ \theta) = \frac{\theta^u e^{-\theta}}{u!};\ \theta \geq 0;\ u = 0,1,2,.......;\ g(\theta) = \theta^2,$
$\mathcal{K} = \{t_1, t_2\},\ t_1 -$ ОМП, $t_2 -$ НОРМД

c. Отрицательно-биномиальное распределение.

$$f(u;r,\theta) = C_{r+u-1}^u \theta^u (1-\theta)^r,$$

$u = 0, 1, 2, \ldots,\ 0 < \theta < 1,\ r > 1,\ r$ – целое.

Обозначение случайной величины $NBIN(r; \theta)$, т.е.

$$y_1 \stackrel{d}{=} NBIN(r; \theta).$$

Производящая функция

$$(z) = \sum_{u=0}^{\infty} C_{r+u-1}^{u} \theta^u (1-\theta)^r z^u = \left\{1 - \frac{\theta}{1-\theta}(z-1)\right\}^{-r},\ |z| < \frac{1}{\theta}$$

Факториальный момент k-го порядка

$$\mathbf{E}\{y_1(y_1-1)\ldots(y_1-k+1); \theta\} = r(r+1)\ldots(r+k-1)\left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)^k. \qquad (1)$$

$\mathbf{E}y_1 = r\frac{\theta}{1-\theta}$,
$\mathbf{D}y_1 = r\frac{\theta}{(1-\theta)^2}$,
Таким образом $\mathbf{E}y_1 < \mathbf{D}y_1$, **(!)**.

c_2 $f(u;\theta) = C_{r+u-1}^{u}\theta^u(1-\theta)^r,\ 0 \le \theta \le 1,\quad r -$ целое, $r \ge 1, u = 0, 1, 2, ...;\quad g(\theta) = D\{y_1;\theta\}$, $\mathcal{K} = \{t_1, t_2\},\ t_1 -$ ОМП, $t_2 -$ НОРМД.

c_3 $f(u;\theta) = C_{r+u-1}^{u}\theta^u(1-\theta)^r,\ 0 \le \theta \le 1,\ r -$ целое, $r \ge 1, u = 0, 1, 2, ...;\quad g(\theta) = M\{y_1^2;\theta\}$, $\mathcal{K} = \{t_1, t_2\},\ t_1 -$ ОМП, $t_2 -$ НОРМД.

d. Показательное распределение с параметром масштаба (без сдвига).

$$f(u;\theta) = \frac{1}{\theta}\exp\{-\frac{u}{\theta}\},\ u > 0,\ \theta > 0,$$

Обозначение случайной величины

$$y_1 = E(\theta) = \theta\ E(1),$$

$\mathbf{E}y_1 = \theta$,
$\mathbf{D}y_1 = \theta^2$.

d_1 $f(u;\theta) = \theta^{-1}\ exp\{-u/\theta\}, u > 0,\ \theta > 0,\quad g(\theta) = \theta^2$, $\mathcal{K} = \{t_1,\ t_2\},\ t_1 -$ ОМП, $t_2 -$ НОРМД

e. Показательное распределение с параметрами сдвига и масштаба.

$$f(u;\theta) = \frac{1}{\sigma}\exp\left\{-\frac{u-\mu}{\sigma}\right\},\ u > \mu,$$

$$\theta = (\mu, \sigma),\ -\infty < \mu < \infty,\ \sigma > 0.$$

Обозначение случайной величины $y_1 = \mu + \sigma E(1)$.

e_1 $y_1 = \mu + E(\sigma),\ -\infty < \mu < \infty,\ \sigma > 0,\ \theta = (\mu, \sigma),\ g(\theta) = \mu,\ \mathcal{K} = \{t_1, t_2\},\ t_1 -$ОМН, $t_2 -$НОРМД

e_3 $y_1 = \mu + E(\sigma),\ -\infty < \mu < \infty,\ \sigma > 0,\ \theta = (\mu, \sigma),\quad g(\theta) = M\{y_1^m;\theta\}$, $\mathcal{K} = \{t_1, t_2\},\ t_1 -$ ОМН, $t_2 -$ НОРМД

e_4 $y_1 = \mu + E(\sigma),\ -\infty < \mu < \infty,\ \sigma > 0,\ \theta = (\mu, \sigma),\quad g(\theta) = \sigma,\ \mathcal{K} = \{t_1, t_2\},\ t_1 -$ОМН, $t_2 -$НОРМД

e_5 $y_1 = \mu + E(\sigma)$, $-\infty < \mu < \infty$, $\sigma > 0$, $\theta = (\mu, \sigma)$, $g(\theta) = \mu^2$, $\mathcal{K} = \{t_1, t_2\}$, $t_1 -$ ОМН, $t_2 -$ НОРМД

e_6 $y_1 = \mu + E(\sigma)$, $-\infty < \mu < \infty$, $\sigma > 0$, $\theta = (\mu, \sigma)$, $g(\theta) = \sigma^2$, $\mathcal{K} = \{t_1, t_2\}$, $t_1 -$ ОМН, $t_2 -$ НОРМД

e_8 $y_1 = \mu + E(\sigma)$, $-\infty < \mu < \infty$, $\sigma > 0$, $\theta = (\mu, \sigma)$, $g(\theta) = D\{y_1; \theta\}$, $\mathcal{K} = \{t_1, t_2\}$, $t_1 -$ ОМН, $t_2 -$ НОРМД

e_9 $y_1 = \mu + E(\sigma)$, $-\infty < \mu < \infty$, $\sigma > 0$, $\theta = (\mu, \sigma)$, $g(\theta) = \mu^2 + \sigma^2$, $\mathcal{K} = \{t_1, t_2\}$, $t_1 -$ ОМН, $t_2 -$ НОРМД

e_{10} $y_1 = \mu + E(\sigma)$, $-\infty < \mu < \infty$, $\sigma > 0$, $\theta = (\mu, \sigma)$, $g(\theta) = q$ – квантиль, т.е. $\mu + \sigma \ln \dfrac{1}{1-q}$, $\mathcal{K} = \{t_1, t_2\}$, $t_1 -$ ОМН, $t_2 -$ НОРМД

e_{13} $y_1 = \mu + E(\sigma)$, $-\infty < \mu < \infty$, $\sigma > 0$, $\theta = (\mu, \sigma)$, $g(\theta) = \frac{1}{\sigma}$, $\mathcal{K} = \{t_1, t_2\}$, $t_1 -$ОМН, $t_2 -$НОРМД

f. Нормальное распределение с единичной дисперсией.

$$f(u;\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\{-\frac{1}{2}(u-\theta)^2\},$$
$$-\infty < u < \infty, \ -\infty < \theta < \infty.$$

Обозначение случайной величины $y_1 = N(\theta, 1)$.
$\mathbf{E}\{y_1; \theta\} = \theta$,
$\mathbf{E}\{y_1^2; \theta\} = 1 + \theta^2$,
$\mathbf{D}\{y_1; \theta\} = 1$.

f_1 $f(u;\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, exp\{-\frac{1}{2}(u-\theta)^2\}, -\infty < u < \infty, -\infty < \theta < \infty$, $g(\theta) = \theta^2$, $\mathcal{K} = \{t_1,\ t_2\}$, $t_1 -$ ОМП, $t_2 -$ НОРМД

f_2 $y_1 = N(\theta, 1)$, $-\infty < \theta < \infty$, $g(\theta) = \Phi(u_0 - \theta), u_0 -$; $\mathcal{K} = \{t_1,\ t_2\}$, $t_1 -$ ОМП, $t_2 -$ НОРМД

f_3 $y_1 = N(\theta, 1)$, $-\infty < \theta < \infty$, $g(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, exp\{-\frac{1}{2}(u_0 - \theta)^2\}$, $u_0 -$; $\mathcal{K} = \{t_1,\ t_2\}$, $t_1 -$ ОМП, $t_2 -$ НОРМД

f_4 $y_1 = N(\theta, 1)$, $-\infty < \theta < \infty$, $g(\theta) = \exp\{-\theta\}$; $\mathcal{K} = \{t_1,\ t_2\}$, $t_1 -$ ОМП, $t_2 -$ НОРМД

f_5 $y_1 = N(\theta, 1)$, $-\infty < \theta < \infty$, $g(\theta) = P\{u_1 < y_1 < u_2; \theta\}$; $\mathcal{K} = \{t_1,\ t_2\}$, $t_1 -$ ОМП, $t_2 -$ НОРМД

f_6 $y_1 = N(\theta, 1)$, $-\infty < \theta < \infty$, $g(\theta) = P\{y_1 > u_0\}, u_0 -$; $\mathcal{K} = \{t_1,\ t_2\}$, $t_1 -$ ОМП, $t_2 -$ НОРМД

f_7 $y_1 = N(\theta, 1)$, $-\infty < \theta < \infty$, $g(\theta) = e^{\nu\theta}, \nu -$; $\mathcal{K} = \{t_1,\ t_2\}$, $t_1 -$ ОМП, $t_2 -$ НОРМД

g. Нормальное распределение. (Оба параметра неизвестны)

$$f(u;\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{u-\mu}{\sigma}\right)^2\right\},$$

$$-\infty < u < \infty, \quad \theta = (\mu, \sigma^2), \quad -\infty < \mu < \infty, \quad \sigma^2 > 0.$$

Обозначение случайной величины

$$y_1 = N(\mu, \sigma^2)$$

$\mathbf{E}\{y_1; \theta\} = \mu$
$\mathbf{E}\{y_1^2; \theta\} = \sigma^2 + \mu^2$
$\mathbf{D}\{y_1; \theta\} = \sigma^2$

g_1 $y_1 = N(\mu, \sigma^2),\ \theta = (\mu, \sigma^2),\ -\infty < \mu < \infty,\ \sigma^2 > 0,\ g(\theta) = \mu^2,$
$\mathcal{K} = \{t_1,\ t_2\},\ t_1 -$ ОМП, $t_2 -$ НОРМД

g_2 $y_1 = N(\mu, \sigma^2),\ \theta = (\mu, \sigma^2),\ -\infty < \mu < \infty,\ \sigma^2 > 0,\ g(\theta) = M\{y_1^2; \theta\},$
$\mathcal{K} = \{t_1, t_2\},\ t_1 -$ ОМП, $t_2 -$ НОРМД

g_3 $y_1 = N(\mu, \sigma^2); \theta = (\mu, \sigma^2),\ -\infty < \mu < \infty,\ \sigma^2 > 0,\ g(\theta) = \mu^3,$
$\mathcal{K} = \{t_1, t_2\},\ t_1 -$ ОМП, $t_2 -$ НОРМД

g_4 $y_1 = N(\mu, \sigma^2),\ \theta = (\mu, \sigma^2),\ -\infty < \mu < \infty,\ \sigma^2 > 0,\ g(\theta) = \sigma,$
$\mathcal{K} = \{t_1, t_2\},\ t_1 -$ ОМП, $t_2 -$ НОРМД

g_5 $y_1 = N(\mu, \sigma^2),\ \theta = (\mu, \sigma^2)\ -\infty < \mu < \infty,\ \sigma^2 > 0,\ g(\theta) = \sigma^4,$
$\mathcal{K} = \{t_1, t_2\},\ t_1 -$ ОМН, $t_2 -$ НОРМД

g_6 $y_1 = N(\mu, \sigma^2),\ \theta = (\mu, \sigma^2),\ -\infty < \mu < \infty,\ \sigma^2 > 0,\ g(\theta) = \mu/\sigma,$
$\mathcal{K} = \{t_1, t_2\},\ t_1 -$ ОМН, $t_2 -$ НОРМД

g_7 $y_1 = N(\mu, \sigma^2),\ \theta = (\mu, \sigma^2),\ -\infty < \mu < \infty,\ \sigma^2 > 0,\ g(\theta) = M\{y_1^3; \theta\},$
$\mathcal{K} = \{t_1, t_2\},\ t_1 -$ ОМН, $t_2 -$ НОРМД

g_8 $y_1 = N(\mu, \sigma^2),\ \theta = (\mu, \sigma^2),\ -\infty < \mu < \infty,\ \sigma^2 > 0,\ g(\theta) = \mu + a_0\sigma, a_0\ -$ известно,
$\mathcal{K} = \{t_1, t_2\},\ t_1 -$ ОМН, $t_2 -$ НОРМД

g_9 $y_1 = N(\mu, \sigma^2),\ \theta = (\mu, \sigma^2),\ -\infty < \mu < \infty,\ \sigma^2 > 0,\ g(\theta) = D\{y_1^2; \theta\},$
$\mathcal{K} = \{t_1, t_2\},\ t_1 -$ ОМН, $t_2 -$ НОРМД

g_{10} $y_1 = N(\mu, \sigma^2),\ \theta = (\mu, \sigma^2),\ -\infty < \mu < \infty,\ \sigma^2 > 0,\ g(\theta) = \sigma^3,$
$\mathcal{K} = \{t_1, t_2\},\ t_1 -$ ОМН, $t_2 -$ НОРМД

h. Равномерное распределение (с одним пороговым параметром)

$$f(u; \theta) = \frac{1}{\theta} \mathbb{I}(0 < u < \theta), \quad \theta > 0.$$

Обозначение случайной величины

$$y_i = U(0, \theta) = \theta U(0, 1).$$

$\mathbf{E}y_1 = \frac{\theta}{2},$
$\mathbf{E}y_1^2 = \frac{\theta^2}{3},$
$\mathbf{D}y_1 = \frac{\theta^2}{12}.$

h_1 $\quad y_1 = U(0,\theta),\ \theta > 0,\ g(\theta) = P\{y_1 < u;\theta\},$
$\mathcal{K} = \{t_1, t_2\},\ t_1 -$ ОМН, $t_2 -$ НОРМД

h_2 $\quad y_1 = U(0,\theta),\ \theta > 0,\ g(\theta) = (P\{y_1 < u;\theta\})^2,$
$\mathcal{K} = \{t_1, t_2\},\ t_1 -$ ОМН, $t_2 -$ НОРМД

h_4 $\quad y_1 = U(0,\theta),\ \ \theta > 0,\ g(\theta) = \theta^{\nu}, \nu > -n,$
$\mathcal{K} = \{t_1, t_2\},\ t_1 -$ ОМН, $t_2 -$ НОРМД

i. Распределение Парето

$f(u;\theta) = \alpha \dfrac{\sigma^{\alpha}}{u^{\alpha+1}} \mathbb{I}(u > \sigma)$, $u > \sigma$, $\theta = (\alpha, \sigma)$, $\alpha > 0$, α – параметр формы; $\sigma > 0$, σ – одновременно и параметр масштаба и пороговый параметр носителя меры.

Обозначение случайной величины

$$y_1 = PAR(\alpha, \sigma).$$

При вычислениях полезно иметь в виду следующее стохастическое представление

$$PAR(\alpha, \sigma) = \exp\left\{\ln\sigma + \frac{1}{\alpha}E(1)\right\}.$$

i_1 $\quad f(u;\theta) = \alpha\sigma^{-1}(\sigma/u)^{\alpha+1},\ \theta = (\sigma, \alpha),\ u > \sigma > 0,\ \alpha > 0,$
$g(\theta) = P\{y_1 < u\} = 1 - (\frac{\sigma}{u})^{\alpha},$
$\mathcal{K} = \{t_1, t_2\},\ t_1 -$ ОМН, $t_2 -$ НОРМД

i_2 $\quad f(u;\theta) = \alpha\sigma^{-1}(\sigma/u)^{\alpha+1},\ \theta = (\sigma, \alpha),\ u > \sigma > 0,\ \alpha > 0,\ g(\theta) = \alpha^r,$
$r -$ целое, $r \geq 1,$
$\mathcal{K} = \{t_1, t_2\},\ t_1 -$ ОМН, $t_2 -$ НОРМД

i_3 $\quad f(u;\theta) = \alpha\sigma^{-1}(\sigma/u)^{\alpha+1},\ \theta = (\sigma, \alpha),\ u > \sigma > 0,\ \alpha > 0,\ g(\theta) = \sigma^r,$
$r -$ целое, $r \geq 1,$
$\mathcal{K} = \{t_1, t_2\},\ t_1 -$ ОМН, $t_2 -$ НОРМД

i_9 $\quad f(u;\theta) = \alpha\sigma^{-1}(\sigma/u)^{\alpha+1},\ \theta = (\sigma, \alpha),\ u > \sigma > 0,\ \alpha > 0,\ g(\theta) = (P\{y_1 > u_0;\theta\})^2,$
$\mathcal{K} = \{t_1, t_2\},\ t_1 -$ ОМН, $t_2 -$ НОРМД

k. Гамма распределение с известным параметром формы

$$f(u;\theta) = \frac{u^{\alpha-1}\exp(-u/\sigma)}{\sigma^{\alpha}\Gamma(\alpha)},$$

$$\theta = (\alpha, \sigma), \quad u > 0, \quad \sigma > 0, \quad \alpha > 0, \quad \alpha - \text{ известный параметр.}$$

Обозначение случайной величины

$$y_1 = G(\alpha, \sigma).$$

$\mathbf{E}\{(G(\alpha,\sigma))^r\} = \frac{\Gamma(\alpha+r)}{\Gamma(\alpha)}\sigma^r, r > 0;$
$\mathbf{E}\{(G(\alpha,\sigma))^{-r}\} = \frac{\Gamma(\alpha-r)}{\Gamma(\alpha)}\frac{1}{\sigma^r}, r > \alpha.$

k_1 $\quad f(u;\theta) = \frac{u^{\alpha-1}\exp(-u/\sigma)}{\sigma^{\alpha}\Gamma(\alpha)},\ \theta = (\alpha, \sigma),\ u > 0,\ \sigma > 0,\ \alpha = 2,$
$g(\theta) = M\{y_1^2;\theta\}, \mathcal{K} = \{t_1, t_2\},\ t_1 -$ ОМП, $t_2 -$ НОРМД

k_2 $\quad f(u;\theta) = \frac{u^{\alpha-1}\exp(-u/\sigma)}{\sigma^{\alpha}\Gamma(\alpha)},\ \theta = (\alpha, \sigma),\ u > 0,\ \sigma > 0,\ \alpha = 2,$
$g(\theta) = M\{y_1^3;\theta\}, \mathcal{K} = \{t_1, t_2\},\ t_1 -$ ОМП, $t_2 -$ НОРМД

k_3 $f(u;\theta) = \frac{u^{\alpha-1}\exp(-u/\sigma)}{\sigma^\alpha \Gamma(\alpha)},\ \theta = (\alpha,\sigma),\ u > 0,\ \sigma > 0,\ \alpha = r,\ r$ – целое,
$g(\theta) = M\{y_1^k;\theta\},\ k$ – целое, $\mathcal{K} = \{t_1,t_2\},\ t_1$ – ОМП, t_2 – НОРМД

k_4 $f(u;\theta) = \frac{u^{\alpha-1}\exp(-u/\sigma)}{\sigma^\alpha \Gamma(\alpha)},\ \theta = (\alpha,\sigma),\ u > 0,\ \sigma > 0,\ \alpha = r,\ r$ – целое,
$g(\theta) = M\{\frac{1}{y_1};\theta\},\ \mathcal{K} = \{t_1,t_2\},\ t_1$ – ОМП, t_2 – НОРМД

k_5 $f(u;\theta) = \frac{u^{\alpha-1}\exp(-u/\sigma)}{\sigma^\alpha \Gamma(\alpha)},\ \theta = (\alpha,\sigma),\ u > 0,\ \sigma > 0,\ \alpha = r,\ r$ – целое,
$g(\theta) = \sigma^2,\ \mathcal{K} = \{t_1,t_2\},\ t_1$ – ОМП, t_2 – НОРМД

k_6 $f(u;\theta) = \frac{u^{\alpha-1}\exp(-u/\sigma)}{\sigma^\alpha \Gamma(\alpha)},\ \theta = (\alpha,\sigma),\ u > 0,\ \sigma > 0,\ \alpha = r,\ r$ – целое,
$g(\theta) = \frac{1}{\sigma},\ \mathcal{K} = \{t_1,t_2\},\ t_1$ – ОМП, t_2 – НОРМД

l. Геометрическое распределение.

$$f(u;\theta) = \theta^u(1-\theta), \quad u = 0,1,\ldots,0 < \theta < 1$$

Обозначение случайной величины $y_i = NBIN(1;\theta)$.

Производящая функция

$$(z) = \sum_{u=0}^{\infty} \theta^u(1-\theta)z^u = \left\{1 - \frac{\theta}{1-\theta}(z-1)\right\}^{-1}, \quad |z| < \frac{1}{\theta};$$

$\mathbf{E}y_1 = \dfrac{\theta}{1-\theta}$,
$\mathbf{D}y_1 = \dfrac{\theta}{(1-\theta)^2}$.

Факториальный момент k-го порядка

$$\mathbf{E}y_1(y_1-1)\ldots(y_1-k+1) = k!\left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)^k.$$

l_1 $y_i = NBIN(1;\theta), g(\theta) = \theta;\ n = 1$,
$\mathcal{K} = \{t_1,t_2\},\ t_1$ – ОМП, t_2 – НОРМД

l_2 $y_i = NBIN(1;\theta), g(\theta) = \theta;\ n > 1$,
$\mathcal{K} = \{t_1,t_2\},\ t_1$ – ОМП, t_2 – НОРМД

l_3 $y_i = NBIN(1;\theta), g(\theta) = 1-\theta;\ n > 1$,
$\mathcal{K} = \{t_1,t_2\},\ t_1$ – ОМП, t_2 – НОРМД

l_4 $y_i = NBIN(1;\theta), g(\theta) = Dy_1$,
$\mathcal{K} = \{t_1,t_2\},\ t_1$ – ОМП, t_2 – НОРМД

l_5 $y_i = NBIN(1;\theta), g(\theta) = My_1$,
$\mathcal{K} = \{t_1,t_2\},\ t_1$ – ОМП, t_2 – НОРМД

m. Обратное нормальное распределение

$$f(u;\theta) = \frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{\alpha\sigma^3}{2\pi u^3}}\exp\left\{-\frac{\alpha(\frac{u}{\sigma}-1)^2}{2\frac{u}{\sigma}}\right\},$$

$u > 0$, $\theta = (\alpha,\sigma)$, α – параметр формы, $\alpha > 0$, σ – параметр масштаба, $\sigma > 0$.

Обозначение случайной величины $y_i = INVN(\alpha,\sigma)$.

$\mathbf{E}\{y_1;\theta\} = \sigma$,
$\mathbf{E}\{y_1^2;\theta\} = \sigma^2\left(\frac{1+\alpha}{\alpha}\right)$,

$\mathbf{E}\{y_1^{-r};\theta\} = \frac{\mathbf{E}\{y_1^{r+1};\theta\}}{\sigma^{2r+1}}$,
$\mathbf{D}\{y_1;\theta\} = \frac{\sigma^2}{\alpha}$.

m_2 $f(u;\theta) = \frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{\alpha\sigma^3}{2\pi u^3}}\exp\left\{-\frac{\alpha(\frac{u}{\sigma}-1)^2}{2\frac{u}{\sigma}}\right\}$, $\theta = (\alpha,\sigma)$, $u \geq 0$, $\sigma > 0$, $\alpha > 0$, $g(\theta) = \sigma$, $\mathcal{K} = \{t_1, t_2\}$, $t_1 -$ ОМП, $t_2 -$ НОРМД

m_3 $f(u;\theta) = \frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{\alpha\sigma^3}{2\pi u^3}}\exp\left\{-\frac{\alpha(\frac{u}{\sigma}-1)^2}{2\frac{u}{\sigma}}\right\}$, $\theta = (\alpha,\sigma)$, $u \geq 0$, $\sigma > 0$, $\alpha > 0$, $g(\theta) = \frac{1}{\sigma}$, $\mathcal{K} = \{t_1, t_2\}$, $t_1 -$ ОМП, $t_2 -$ НОРМД

m_4 $f(u;\theta) = \frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{\alpha\sigma^3}{2\pi u^3}}\exp\left\{-\frac{\alpha(\frac{u}{\sigma}-1)^2}{2\frac{u}{\sigma}}\right\}$, $\theta = (\alpha,\sigma)$, $u \geq 0$, $\sigma > 0$, $\alpha > 0$, $g(\theta) = \frac{1}{\sigma^2}$, $\mathcal{K} = \{t_1, t_2\}$, $t_1 -$ ОМП, $t_2 -$ НОРМД

m_5 $f(u;\theta) = \frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{\alpha\sigma^3}{2\pi u^3}}\exp\left\{-\frac{\alpha(\frac{u}{\sigma}-1)^2}{2\frac{u}{\sigma}}\right\}$, $\theta = (\alpha,\sigma)$, $u \geq 0$, $\sigma > 0$, $\alpha > 0$, $g(\theta) = \alpha\sigma$, $\mathcal{K} = \{t_1, t_2\}$, $t_1 -$ ОМП, $t_2 -$ НОРМД

m_6 $f(u;\theta) = \frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{\alpha\sigma^3}{2\pi u^3}}\exp\left\{-\frac{\alpha(\frac{u}{\sigma}-1)^2}{2\frac{u}{\sigma}}\right\}$, $\theta = (\alpha,\sigma)$, $u \geq 0$, $\sigma > 0$, $\alpha > 0$, $g(\theta) = \frac{\alpha}{\sigma}$, $\mathcal{K} = \{t_1, t_2\}$, $t_1 -$ ОМП, $t_2 -$ НОРМД

m_7 $f(u;\theta) = \frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{\alpha\sigma^3}{2\pi u^3}}\exp\left\{-\frac{\alpha(\frac{u}{\sigma}-1)^2}{2\frac{u}{\sigma}}\right\}$, $\theta = (\alpha,\sigma)$, $u \geq 0$, $\sigma > 0$, $\alpha > 0$, $g(\theta) = \frac{1}{\alpha\sigma}$, $\mathcal{K} = \{t_1, t_2\}$, $t_1 -$ ОМП, $t_2 -$ НОРМД

m_8 $f(u;\theta) = \frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{\alpha\sigma^3}{2\pi u^3}}\exp\left\{-\frac{\alpha(\frac{u}{\sigma}-1)^2}{2\frac{u}{\sigma}}\right\}$, $\theta = (\alpha,\sigma)$, $u \geq 0$, $\sigma > 0$, $\alpha > 0$, $g(\theta) = (\alpha\sigma)^2$, $\mathcal{K} = \{t_1, t_2\}$, $t_1 -$ ОМП, $t_2 -$ НОРМД

m_9 $f(u;\theta) = \frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{\alpha\sigma^3}{2\pi u^3}}\exp\left\{-\frac{\alpha(\frac{u}{\sigma}-1)^2}{2\frac{u}{\sigma}}\right\}$, $\theta = (\alpha,\sigma)$, $u \geq 0$, $\sigma > 0$, $\alpha > 0$, $g(\theta) = (\alpha\sigma)^3$, $\mathcal{K} = \{t_1, t_2\}$, $t_1 -$ ОМП, $t_2 -$ НОРМД

m_{11} $f(u;\theta) = \frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{\alpha\sigma^3}{2\pi u^3}}\exp\left\{-\frac{\alpha(\frac{u}{\sigma}-1)^2}{2\frac{u}{\sigma}}\right\}$, $\theta = (\alpha,\sigma)$, $u \geq 0$, $\sigma > 0$, $\alpha > 0$, $g(\theta) = (\frac{1}{\alpha\sigma})^2$, $\mathcal{K} = \{t_1, t_2\}$, $t_1 -$ ОМП, $t_2 -$ НОРМД

m_{12} $f(u;\theta) = \frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{\alpha\sigma^3}{2\pi u^3}}\exp\left\{-\frac{\alpha(\frac{u}{\sigma}-1)^2}{2\frac{u}{\sigma}}\right\}$, $\theta = (\alpha,\sigma)$, $u \geq 0$, $\sigma > 0$, $\alpha > 0$, $g(\theta) = \alpha$, $\mathcal{K} = \{t_1, t_2\}$, $t_1 -$ ОМП, $t_2 -$ НОРМД

m_{13} $f(u;\theta) = \frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{\alpha\sigma^3}{2\pi u^3}}\exp\left\{-\frac{\alpha(\frac{u}{\sigma}-1)^2}{2\frac{u}{\sigma}}\right\}$, $\theta = (\alpha,\sigma)$, $u \geq 0$, $\sigma > 0$, $\alpha > 0$, $g(\theta) = \frac{1}{\alpha}$, $\mathcal{K} = \{t_1, t_2\}$, $t_1 -$ ОМП, $t_2 -$ НОРМД

n. Усеченное распределение Пуассона

1. Обозначение семейства распределений $\mathcal{TRPOIS}$.

2. Параметрическое пространство $\Theta = \{\theta, \theta \geq 0\}$.

3. Интерпретация и области применения.

   Усеченное распределение Пуассона используется для статистического описания числа страховых случаев.

4. Обозначение и область значений случайной величины: $TRPOIS(\theta) \in N_+$.

5. Стохастические представления и тождества.

6. Функция распределения и плотность распределения

6.1.

$$\mathcal{TRPOIS}(u;\theta) = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{[u]} \frac{\theta^i e^{-\theta}}{i!(1-e^{-\theta})}, & u > 1, \\ 0, & u \le 1 \end{cases}$$

6.1.1. Семейство распределений $\mathcal{TRPOIS}$ является стохастически возрастающим по θ, т.е. $\mathcal{TRPOIS}(u;\theta)\downarrow$ при $\theta\uparrow$.

6.2. $trpois(u;\theta) = \dfrac{\theta^u e^{-\theta}}{u!(1-e^{-\theta})}, \quad u \in N_+$.

7. Характеристические преобразования распределений.

7.1.

7.2. Производящая функция моментов

$$M(t) = \frac{1-\exp\{\theta e^t\}}{1-e^\theta}$$

7.3. Производящая функция

$$(z) = \frac{e^{z\theta}-1}{e^\theta - 1}.$$

8. Моментные характеристики случайной величины.

8.1. Начальные моменты

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{\theta e^\theta}{e^\theta - 1}, \\ a_2 &= \frac{(\theta+\theta^2)e^\theta}{e^\theta - 1}, \\ a_3 &= \frac{(\theta^3+3\theta^2+\theta)e^\theta}{e^\theta - 1}, \\ a_4 &= \frac{(\theta^4+6\theta^3+7\theta^2+\theta)e^\theta}{e^\theta - 1} \end{aligned}$$

8.2. Центральные моменты

$$m_2 = \frac{\theta e^\theta(e^\theta - 1 - \theta)}{(e^\theta-1)^2}.$$

С учетом явных выражений для $a_r, \quad r=\overline{1,4}$, вычислим m_3 и m_4 по формулам

$$\begin{aligned} m_3 &= a_3 - 3a_1a_2 + a_1^3, \\ m_4 &= a_4 - 4a_1a_3 + 6a_1^2a_2 - 3a_1^4. \end{aligned}$$

n_1 $f(u;\theta) = \frac{\theta e^{-\theta}}{u!(1-e^{-\theta})} u = 1,2,...;\ \theta > 0,\ g(\theta) = \theta^2,$
$\mathcal{K} = \{t_1, t_2\},\ t_1 -$ ОМП, $t_2 -$ НОРМД

n_2 $f(u;\theta) = \frac{\theta e^{-\theta}}{u!(1-e^{-\theta})} u = 1,2,...;\ \theta > 0,\ g(\theta) = 1-e^{-\theta},$
$\mathcal{K} = \{t_1, t_2\},\ t_1 -$ ОМП, $t_2 -$ НОРМД

s. Равномерное распределение на отрезке (θ_1, θ_2)

$$f(u;\theta) = \begin{cases} 0, & u < \theta_1, \\ \frac{1}{\theta_2-\theta_1}, & \theta_1 \le u \le \theta_2, \\ 0, & u > \theta_2, \end{cases}$$

где $\theta_1 < \theta_2, \quad \theta = (\theta_1,\theta_2)^T$.

Обозначение случайной величины: $U(\theta_1, \theta_2)$.
$\mathbf{E}\{y_1; \theta\} = \frac{\theta_1+\theta_2}{2}$,
$\mathbf{E}\{y_1^2; \theta\} = \frac{\theta_2^3-\theta_1^3}{3}$,
$\mathbf{D}\{y_1; \theta\} = \frac{(\theta_2-\theta_1)^2}{12}$.

s_1 $y_1 = U(\theta_1, \theta_2),\ \theta_i > 0,\ g(\theta) = \theta_1,$
$\mathcal{K} = \{t_1, t_2\},\ t_1 -$ ОМН, $t_2 -$ НОРМД

s_3 $y_1 = U(\theta_1, \theta_2),\ \theta_i > 0,\ g(\theta) = \frac{\theta_1+\theta_2}{2},$
$\mathcal{K} = \{t_1, t_2\},\ t_1 -$ ОМН, $t_2 -$ НОРМД

p. Распределение Вейбулла

$$f(u; \alpha, \sigma) = \frac{\alpha}{\sigma^\alpha} u^{\alpha-1} \exp\Big\{-\Big(\frac{u}{\sigma}\Big)^\alpha\Big\}, \quad u \geq 0, \quad \sigma > 0, \quad \alpha > 0,$$

α – известная величина.

Обозначение случайной величины: $W(\alpha, \sigma)$.
$\mathbf{E}\{y_1; \alpha, \sigma\} = \sigma\Gamma(1 + \frac{1}{\alpha})$,
$\mathbf{E}\{y_1^1; \alpha, \sigma\} = \sigma^2\Gamma(1 + \frac{2}{\alpha})$,
$\mathbf{D}\{y_1; \alpha, \sigma\} = \sigma^2\{\Gamma(1 + \frac{2}{\alpha}) - \big(\Gamma(1 + \frac{1}{\alpha})\big)^2\}$.

p_1 Распределение Вейбулла $f(u; \alpha, \sigma) = \frac{\alpha}{\sigma^\alpha} u^{\alpha-1} \exp\big\{-\big(\frac{u}{\sigma}\big)^\alpha\big\}$,
$u \geq 0, \quad \sigma > 0, \quad \alpha > 0,\ \alpha$ – известная величина,
$g(\sigma) = \sigma^2$,
$\mathcal{K} = \{t_1, t_2\},\ t_1 -$ ОМН, $t_2 -$ НОРМД

p_2 Распределение Вейбулла $f(u; \alpha, \sigma) = \frac{\alpha}{\sigma^\alpha} u^{\alpha-1} \exp\big\{-\big(\frac{u}{\sigma}\big)^\alpha\big\}$,
$u \geq 0, \quad \sigma > 0, \quad \alpha > 0,\ \alpha$ – известная величина,
$g(\sigma) = \sigma^{-1}$,
$\mathcal{K} = \{t_1, t_2\},\ t_1 -$ ОМН, $t_2 -$ НОРМД